SOLUZIONI

Problema 1 [6400]
Dette x e y le lunghezze dei lati dei quadrati, per il Teorema di Pitagora $x^2 + y^2 = AB^2 = 6400$.

Problema 2 [729]
Dato che $a_1, a_2, \ldots a_n$ sono termini di una progressione geometrica, indicando con k la ragione avremo che $a_2 = ka_1$, $a_3 = k^2a_2$, $a_4 = k^3a_1$ e $a_5 = k^4a_1$. Quindi $a_1 + a_2 = a_1(1+k) = 12$, mentre $a_3 + a_4 = a_1k^2(1+k) = 108$. Dividendo fra loro le due relazioni otteniamo $k^2 = \frac{108}{12} = 9$, da cui $k = 3$. Dato che $a_1(1+3) = 12$, anche $a_1 = 3$. Pertanto $a_5 = a_1k^4 = 3 \cdot 81 = 243$, e $a_1a_5 = 3 \cdot 243 = 729$.

Problema 3 [1555]
Nell'equazione $x^3 - 523x^2 - 611x - 422 = 0$ sappiamo, dalle formule di Viète, che $x_1 + x_2 + x_3 = 523$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -611$ e $x_1x_2x_3 = 422$. Dobbiamo calcolare il valore di $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)$. Sviluppando otteniamo

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) = x_1x_2x_3 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + (x_1 + x_2 + x_3) - 1\,,$$

cioè $422 + 611 + 523 - 1 = 1555$.

Problema 4 [12] Scomponendo in fattori primi 10! otteniamo $2^8 3^4 5^2 7$. Controlliamo ora gli esponenti con cui i fattori 2, 3, 5 e 7 compaiono nello sviluppo di 100!.

- Iniziamo col 2: risulta che $\lfloor 100 : 2 \rfloor + \lfloor 100 : 4 \rfloor + \lfloor 100 : 8 \rfloor + \lfloor 100 : 16 \rfloor + \lfloor 100 : 32 \rfloor + \lfloor 100 : 64 \rfloor = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$. Quindi il fattore 2 ha potenza 97; ma in 10! la potenza è 8, pertanto calcoliamo $\lfloor 97 : 8 \rfloor = 12$.

- Passiamo a 3: $\lfloor 100 : 3 \rfloor + \lfloor 100 : 9 \rfloor + \lfloor 100 : 27 \rfloor + \lfloor 100 : 81 \rfloor = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$. In questo caso $\lfloor 48 : 4 \rfloor = 12$.

- Col fattore 5: $\lfloor 100 : 5 \rfloor + \lfloor 100 : 25 \rfloor = 20 + 4 = 24$, e nuovamente $\lfloor 24 : 2 \rfloor = 12$.

- Infine, per il 7, $\lfloor 100 : 7 \rfloor + \lfloor 100 : 49 \rfloor = 14 + 2 = 16$ con $\lfloor 16 : 1 \rfloor = 16$.

Il valore minimo fra quelli trovati è 12, che pertanto è la risposta cercata.

Problema 5 [18]
Dato che i percorsi non sono molto numerosi, possiamo elencarli tutti, notando che quelli che passano sopra la diagonale AB saranno in uguale numero rispetto a quelli che passano al di sotto. Chiamiamo D un singolo passo verso destra di un lato di un quadratino, S uno verso sinistra, A uno verso l'alto, B uno verso il basso. Iniziamo con elencare i percorsi di lunghezza minima (che richiedono 8 passi): DDDDBBBB, DDDBDBBB, DDDBBDBB, DDBDDBBB, DDBDBDBB. Consideriamo adesso percorsi con un numero maggiore di passi: DDBDADBBBB e il suo simmetrico DDDDBSBDBB, con 10 passi. Infine DDBDADBSBDBB e DDBDDASBBDBB, i percorsi più lunghi possibile (12 passi). Perciò abbiamo in totale 9 percorsi sopra la diagonale, e, per quanto detto prima, altrettanti al di sotto: la risposta è 18.

Problema 6 [11] La frazione

$$\frac{42n}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{42n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{84}{n+1}$$

deve essere intera e quindi il numero di interi cercato è pari al numero di divisori di 84 maggiori di 1, che sono 11.

Problema 7 [170]
Dato che

$$abc - cba = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 100(a-c) + (c-a) = 99(a-c)\,,$$

il numero è sicuramente divisibile per 9, indipendentemente dai valori delle sue cifre. Dobbiamo assicurarci che sia divisibile anche per 4. Per questo, dato che 99 è dispari, è necessario che $(a-c)$ sia multiplo di 4. Ma a e c sono cifre, perciò possono differire fra loro solo per 0, 4 o 8. Esaminiamo i casi.

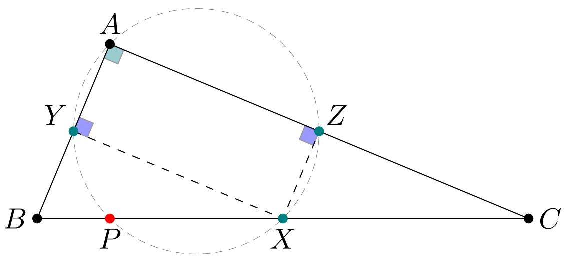
- Se $a - c = 0$, possiamo avere 9 valori per $a = c$ (da 1 a 9) e 10 valori per b. Totale $9 \times 10 = 90$ numeri. Osserviamo che il testo dice che $abc - cba$ deve essere non negativo, perciò dobbiamo contare anche tutti i casi in cui vale 0.

- Se $a - c = 4$, possiamo avere per (a, c) le coppie $(4, 0)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$, $(7, 3)$, $(8, 4)$, $(9, 5)$. In tutti e 6 i casi abbiamo 10 valori possibili per b, quindi in totale 60 coppie.

- Se $a - c = 8$, le possibili coppie (a, c) sono $(8, 0)$ e $(9, 1)$; per ogni coppia abbiamo 10 valori di b, quindi altre 20 coppie.

Il totale è $90 + 60 + 20 = 170$.

Problema 8 [63]
La situazione è la seguente.



Notiamo che, essendo ABC rettangolo in A, allora il quadrilatero $AYXZ$ è un rettangolo. Infatti, il punto medio X di BC è il centro della circonferenza circoscritta ad ABC, quindi è il punto di intersezione degli assi dei segmenti AB e AC, che passano proprio per i punti medi rispettivamente Y e Z. Quindi il quadrilatero $AYXZ$ ha tutti gli angoli retti. Pertanto la circonferenza circoscritta al triangolo YZX passa necessariamente anche per il punto A.

Dal teorema di Pitagora ricaviamo che $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 26$. A questo punto è possibile concludere il problema con il Teorema delle secanti, per cui $BY \cdot BA = BP \cdot BX$, da cui

$$BP = \frac{BA \cdot \frac{BA}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{50}{13}\,,$$

quindi la risposta è $50 + 13 = 63$.

Problema 9 [705]
Ogni addendo è formato dal blocco iniziale "25", un certo numero di zeri e il blocco finale "26". Sommando i contributi dei 101 blocchi "25" si ottiene un numero della forma

$$2\underbrace{777\ldots7}_{\text{100 cifre 7}}500$$

La somma dei 101 blocchi "26" vale $26 \times 101 = 2626$; aggiungendo al numero precedente si ottiene

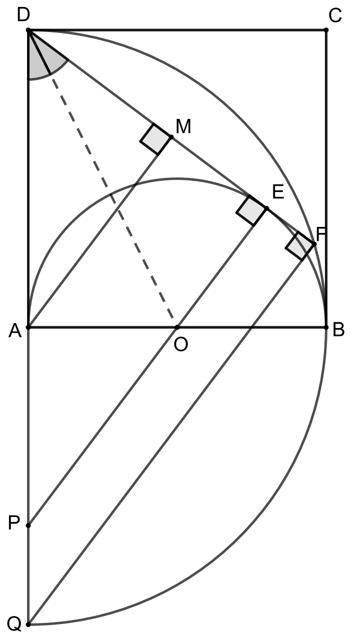
$$2\underbrace{777\ldots7}_{\text{98 cifre 7}}80126$$

La somma delle cifre di questo numero è $2 + 98 \cdot 7 + 17 = 705$.

Problema 10 [86]
Dalla relazione assegnata si ottiene $a(3b-1) = 128b$, cioè $a = \frac{128b}{3b-1}$. Essendo b dispari, $3b-1$ è pari e non può dividere b, dunque $3b-1$ divide 128. D'altro canto, $128 = 2^7$, quindi affinché anche a sia dispari l'unica possibilità è che $3b-1 = 2^7$ (nel caso in cui $3b-1 = 2^k$, con k intero, $0 \leq k \leq 6$, allora accadrebbe che $a = 2^{7-k}b$, dunque a sarebbe pari contro l'ipotesi fornita). Ne consegue che $b = 43$ e $a = \frac{128 \cdot 43}{128} = 43$, pertanto risulta $a + b = 43 + 43 = 86$.

Problema 11 [2024]
Ogni cioccorana, tranne la 1936, deve oltrepassare la 1936 almeno una volta, quindi la 1936 deve essere coinvolta in almeno 2024 scambi. Questo limite è raggiungibile: ad esempio, si porta la cioccorana 1 in ultima posizione, la 2 in penultima e così via.

Problema 12 [960]



Soluzione 1 (sintetica). Detto O il punto medio di AB (centro della semicirconferenza), consideriamo il simmetrico Q di D rispetto ad A e il punto P di intersezione tra le rette AQ e EO. Osserviamo che i triangoli APO, DPE e DQF sono tutti simili tra loro: infatti, l'angolo $D\widehat{E}P$ è retto per la tangenza e l'angolo $D\widehat{F}Q$ è retto in quanto insiste sul diametro DQ della circonferenza passante per D, B e Q. Ora svolgiamo i calcoli (usando come unità di misura i metri), ponendo $AP = x$.

$$AP^2 + AO^2 = OP^2 \Rightarrow OP = \sqrt{x^2+16}$$
$$\frac{OP}{DP} = \frac{AO}{DE} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+16}}{8+x} = \frac{4}{8} \rightarrow x = \frac{16}{3}$$
$$\frac{DF}{DE} = \frac{DQ}{DP} \Rightarrow \frac{DF}{8} = \frac{16}{8+\frac{16}{3}} \rightarrow DF = \frac{48}{5}$$

La misura di DF in centimetri è $100 \cdot \frac{48}{5} = 960$.
Soluzione 2 (trigonometrica). Detto M il punto medio di DF, la retta AM è l'asse di DF (in quanto retta passante per centro e punto medio di una corda). L'idea principale di questa soluzione è calcolare DM come $AD \cdot \cos A\widehat{D}F$. Poniamo $A\widehat{D}O = O\widehat{D}E = \theta$ (i triangoli DAO e DOE sono congruenti). Essendo $DO = \sqrt{AO^2 + AD^2} = 4\sqrt{5}$, ricaviamo immediatamente $\cos\theta = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Inoltre,

$$\cos A\widehat{D}F = \cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

e dunque $DM = AD \cdot \cos 2\theta = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$. Infine, $DF = 2DM = \frac{48}{5}$, che, espresso in centimetri, fa 960.

Problema 13 [31]
Consideriamo la disuguaglianza AM-GM per la terna $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, b$. Abbiamo che

$$\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b}{3} = \frac{a+b}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot b} = \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{4}}\,.$$

Innalziamo al cubo e otteniamo

$$\frac{(a+b)^3}{27} \geq \frac{a^2 b}{4}\,,$$

cioè

$$\frac{(a+b)^3}{a^2 b} \geq \frac{27}{4}\,.$$

Il minimo cercato è dunque $\frac{27}{4}$, che si ottiene, ad esempio, con $a = 2$ e $b = 1$. La risposta è $27+4 = 31$.

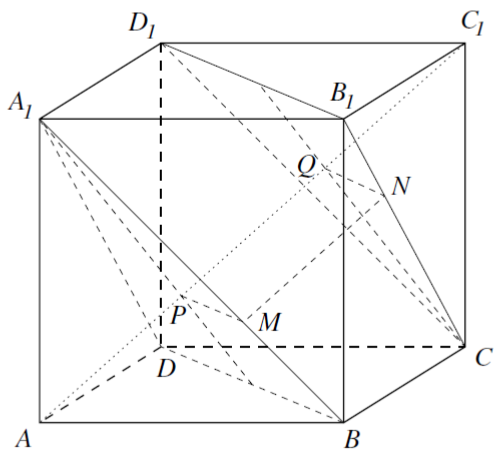
Problema 14 [990]
Siano x e y le rispettive quantità di biglie bianche e nere. La probabilità di estrarre biglie di colori diversi (che vale $\frac{1}{2}$ in quanto complementare alla probabilità fornita nei dati del problema) si può calcolare come $2\cdot\frac{x}{x+y}\cdot\frac{y}{x+y-1}$, quindi

$$\frac{1}{2} = \frac{2xy}{(x+y)(x+y-1)} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned}(x+y)(x+y-1) &= 4xy\\ x^2+2xy+y^2-x-y &= 4xy\\ x^2-2xy+y^2 &= x+y\\ (x-y)^2 &= x+y\end{aligned}$$

Dunque $x+y$ deve essere un quadrato perfetto minore di $2025 = 45^2$, il che implica $x-y \leq 44$. Ponendo $x-y = 44$ e $x+y = 44^2 = 1936$ si trovano $x = 990$ e $y = 946$. Per ogni valore di $x-y$ minore di 44 la somma $x+y$ non può superare 432 e, tenendo conto della differenza relativamente "piccola" tra x e y, non è difficile verificare che $x = 990$ è ottimale.

Problema 15 [9]
Notiamo che $xy+y^2+3x+y = 2(x^2+xy+2x+y)$. Quindi, $(2x-y+1)(x+y) = 0$. Ne segue $y = -x$ oppure $y = 2x+1$. Se $y = 2x+1$ allora $x^2+x(2x+1)+2x+2x+1 = 3$, da cui $3x^2+5x-2 = 0$. Ne segue che $x \in \{-2, \frac{1}{3}\}$ e, quindi, $y = -3, \frac{5}{3}$. Se $y = -x$ allora $x = 3$ e $y = -3$. Dunque il massimo valore assunto da $|xy|$ è 9.

Problema 16 [3888]
Il solido è un *antiprisma* a base triangolare (cioè le due basi sono ruotate di 30° rispetto all'altra). Nella figura le basi sono A_1BD e CD_1B_1.



Per il Teorema di Talete, se costruiamo una piramide con facce triangoli rettangoli isosceli uguali a quelli delle facce laterali, le facce della piramide sono complanari alle facce laterali. Quindi il solido sommato a queste due piramidi è un cubo (come indicato in figura) che ha per lato il cateto delle facce laterali, cioè $L = 18$. Il volume di ciascuna piramide è $\frac{L^3}{6}$ quindi il volume è $\frac{2}{3}L^3 = \frac{2}{3}18^3 = 3888\ \text{cm}^3$.

Problema 17 [6188]
Indichiamo con a_n, b_n, c_n il numero di parole binarie di lunghezza n che rispettivamente, non hanno occorrenze di 01, hanno esattamente una occorrenza di 01, hanno esattamente due occorrenze di 01. Per calcolare a_n osserviamo che $a_1 = 2$, e, per ogni $n \geq 2$, risulta che $a_n = a_{n-1} + 1$, da cui segue $a_n = n + 1$. Per calcolare b_n osserviamo che $b_2 = 1$, e per ogni $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1 \\ &= b_{n-1} + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = b_{n-1} + \binom{n}{2}, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$b_n = \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{2}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Per calcolare c_n osserviamo che $c_4 = 1$, e, per ogni $n \geq 5$,

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} \cdots + b_1 \\ &= c_{n-1} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-2}{3} + \cdots + \binom{3}{3} = c_{n-1} + \binom{n}{4}, \end{aligned}$$

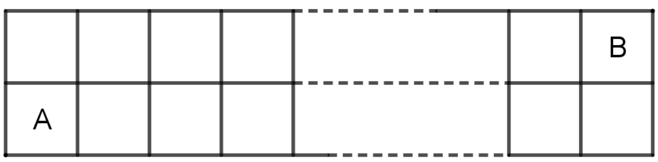
da cui segue che

$$c_n = \binom{n}{4} + \binom{n-1}{4} + \cdots + \binom{4}{4} = \binom{n+1}{5}$$

Pertanto il numero di parole binarie di lunghezza 16 che contengono esattamente 2 occorrenze della sottostringa 01 è

$$c_{16} = \binom{16+1}{5} = \binom{17}{5} = 6188.$$

Problema 18 [6040]
Se la tabella fosse 1×100 la pulce potrebbe fare solo salti orizzontali di lunghezza qualsiasi. In questo caso le diverse sequenze di k salti sarebbero $\binom{n-2}{k-1}$, perché basta contare in quanti modi posso scegliere le $k-1$ caselle toccate dalla pulce sul totale delle $n-2$ caselle disponibili (tuttel le caselle escluse la prima e l'ultima). In particolare, notiamo che se $k - 1 > n - 2$ le sequenze ammissibili sono 0.



Consideriamo ora la tabella $2 \times n$ con l'obiettivo di individuare una formula ricorsiva. Detto $X_{n,k}$ il numero di sequenze diverse che vanno dalla casella A alla casella B, abbiamo che, se il primo salto è diretto in alto, sulla casella che sta immediatamente sopra alla A, allora le possibili continuazioni sono esattamente $\binom{n-2}{k-1}$ (per quanto visto prima). Se invece il primo salto è in orizzontale, le possibili continuazioni sono $\sum_{m=k}^{n-1} X_{m,k-1}$. Quindi la formula cercata è

$$X_{n,k} = \binom{n-2}{k-2} + \sum_{m=k}^{n-1} X_{m,k-1}\,. \tag{1}$$

Cerchiamo ora una formula chiusa per $X_{n,k}$. Osserviamo che, se $n \leq k-1$, allora $X_{n,k} = 0$ perché non ci sono abbastanza caselle per saltare. Se, invece, $n \geq k$, possiamo usare la precedente (1) per dimostrare per induzione che $X_{n,k} = k\binom{n-2}{k-2}$. Infatti,

$$X_{n_0,k} = \binom{n_0-2}{k-2} + \sum_{m=k-1}^{n_0-1} (k-1)\binom{m-2}{k-3} = \binom{n_0-2}{k-2} + (k-1)\left[\binom{k-3}{k-3} + \binom{k-2}{k-3} + \cdots \binom{n_0-3}{k-3}\right] =$$

$$= \binom{n_0-2}{k-2} + (k-1)\binom{n_0-2}{k-2} = k\binom{n_0-2}{k-2}.$$

Pertanto la soluzione è $10 \cdot \binom{98}{8} = 10 \cdot 157\,366\,449\,604$ le cui ultime 4 cifre sono 6040.

Problema 19 [85]

Siano $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $A = B\widehat{A}C$, $B = A\widehat{B}C$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} B = 2A \quad &\Leftrightarrow \quad \sin B = 2\sin A\cos A \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad b = 2a\cos A \quad &\Leftrightarrow \quad b^2c = a(b^2+c^2-a^2) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad b^2c - ab^2 = a(c^2-a^2) \quad &\Leftrightarrow \quad b^2 = a(a+c)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, usando la nota relazione $BI^2 = \frac{ac(a-b+c)}{a+b+c}$, abbiamo

$$\begin{aligned} BI^2 &= \frac{ac(a-b+c)}{a+b+c} = \frac{\left(b^2-a^2\right)(a-b+c)}{a+b+c} \\ &= \frac{\left(b^2-a^2\right)\left(a^2-ab+ac\right)}{a^2+ab+ac} = \frac{\left(b^2-a^2\right)\left(a^2-a^2-ab+b^2\right)}{a^2-a^2+ab+b^2} \\ &= \frac{\left(b^2-a^2\right)\left(b^2-ab\right)}{ab+b^2} = \frac{b\left(b^2-a^2\right)(b-a)}{b(a+b)} = (b-a)^2. \end{aligned}$$

Tenuto conto che $B > A$ abbiamo $b > a$, quindi $BI = b - a$. Pertanto

$$b = a + BI = 68 + 34 = 102$$

da cui, tenuto conto che $b^2 = a(a+c)$, otteniamo

$$c = \frac{b^2-a^2}{a} = \frac{102^2-68^2}{68} = \frac{170 \cdot 34}{68} = 85.$$

Problema 20 [2107]

Studiamo il contorno della figura proposta, cioè i numeri complessi che soddisfano la condizione proposta, $|z-2i| + |z+2i| = 6$. In notazione algebrica, poniamo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa

$$\begin{aligned} |x+iy-2i| + |x+iy+2i| &= 6 \\ |x+i(y-2)| + |x+i(y+2)| &= 6 \\ \sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} &= 6\,. \end{aligned}$$

Isoliamo il primo radicale.

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = 6 - \sqrt{x^2+(y+2)^2}\,.$$

Notiamo che $6 - \sqrt{x^2+(y+2)^2} \geq 0$ è verificata perché $\sqrt{x^2+(y+2)^2} \leq 6$, quindi possiamo elevare al quadrato entrambi i membri.

$$x^2 + (y-2)^2 = \left[6 - \sqrt{x^2+(y+2)^2}\right]^2 = 36 - 12\sqrt{x^2+(y+2)^2} + x^2 + (y+2)^2.$$

Semplificando,

$$3\sqrt{x^2+(y+2)^2} = 9+2y.$$

Anche in questo caso il secondo membro è ≥ 0 e quindi possiamo elevare nuovamente al quadrato.

$$9\left[x^2+(y+2)^2\right] = (9+2y)^2$$
$$9x^2+9y^2+36y+36 = 81+36y+4y^2.$$

Semplifichiamo nuovamente.

$$9x^2+9y^2+36 = 81+4y^2$$
$$9x^2+5y^2 = 45.$$

Otteniamo quindi

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9} = 1\,,$$

che è l'equazione di un'ellisse centrata nell'origine con semiasse maggiore lungo l'asse y: $b^2 = 9 \implies b = 3$ e semiasse minore lungo l'asse x: $a^2 = 5 \implies a = \sqrt{5}$. La semidistanza focale vale allora $c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 5 = 4 \implies c = 2$. Quindi i fuochi sono $F_1(0,2)$, $F_2(0,-2)$ nel piano complesso. L'area dell'ellisse, secondo la nota formula, si calcola come $A_S = \pi ab = 3\pi\sqrt{5}$. Approssimando con i valori forniti si ottiene

$$A_S = 3\pi\sqrt{5} \simeq 3 \cdot 3{,}1416 \cdot 2{,}2361 \simeq 21{,}0748\,.$$

Infine, $A_S = \lfloor 100 \times 21{,}0748 \rfloor = 2107$.